Θεωρία της Παραγωγής

Σκοπός: Η μελέτη της σχέσης εισροών και εκροών

Συντελεστές παραγωγής (Εισροές)

Παραγωγική διαδικασία

Παραγόμενο Προϊόν (Εκροές)

Κεφαλαιουχικά αγαθά
Εργασία
Γή
Επιχειρηματικές ή διοικητικές ικανότητες
κλπ

Τεχνολογία

Αγαθά
Υπηρεσίες

Συνάρτηση Παραγωγής

Η συνάρτηση η οποία εκφράζει την ***τεχνική σχέση*** ανάμεσα στις **εισροές** (συντελεστές παραγωγής) και την ***μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα εκροών*** (ποσότητες παραγόμενων προϊόντων).

$$Q = F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Για $X_1=2$, $X_2=2$ και $X_3=4$ $\quad Q=16$

Η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα που μπορεί να παραχθεί με αυτές τις ποσότητες των συντελεστών

Βραχυχρόνια και Μακροχρόνια περίοδος

- Στην βραχυχρόνια περίοδο ένας τουλάχιστον συντελεστής παραγωγής παραμένει σταθερός
- Στην μακροχρόνια περίοδο κανένας συντελεστής παραγωγής δεν είναι σταθερός

Χρονικοί ορίζοντες που διαφέρουν από επιχείρηση σε επιχείρηση και από κλάδο σε κλάδο

Υπόθεση: Υπάρχουν δύο μόνο συντελεστές παραγωγής, κεφάλαιο (K) και εργασία (L) και ένα προϊόν (Q).

Στην βραχυχρόνια περίοδο μεταβάλλεται μόνο η εργασία

Παραγωγή στη βραχυχρόνια περίοδο

Καμπύλη προϊόντος και συνάρτηση παραγωγής

Στην βραχυχρόνια περίοδο η σχέση μεταξύ προϊόντος και εργασίας μπορεί να δίνεται

Με την μορφή ενός ***πίνακα***

Παράδειγμα:

L	Q
1	4
2	20
3	46
4	79
6	162
7	209
8	259
11	404
12	445
13	480
17	561
18	561
19	555
20	543

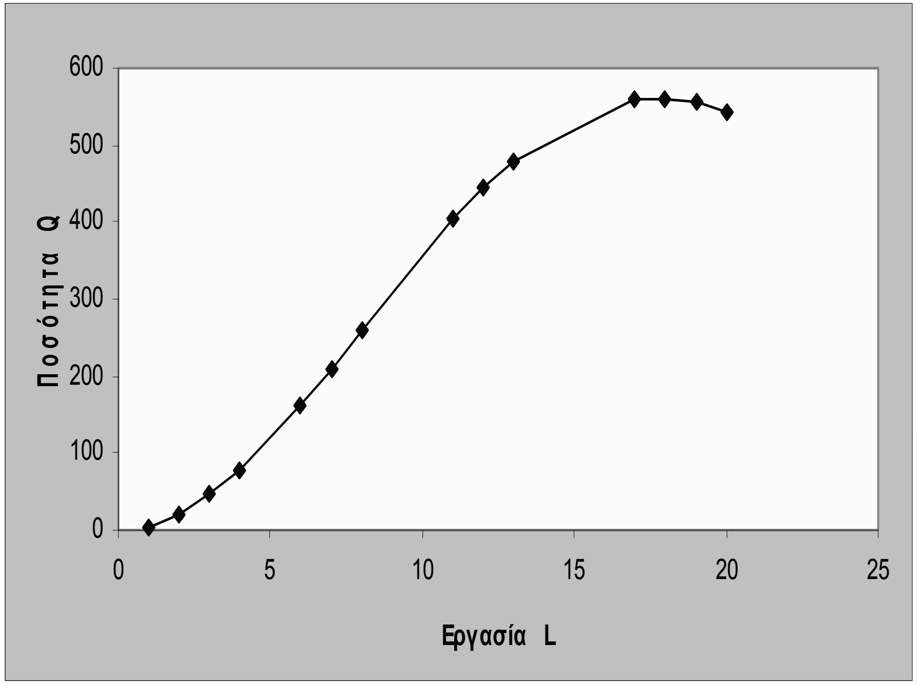
Με την μορφή μιας ***συνάρτησης***

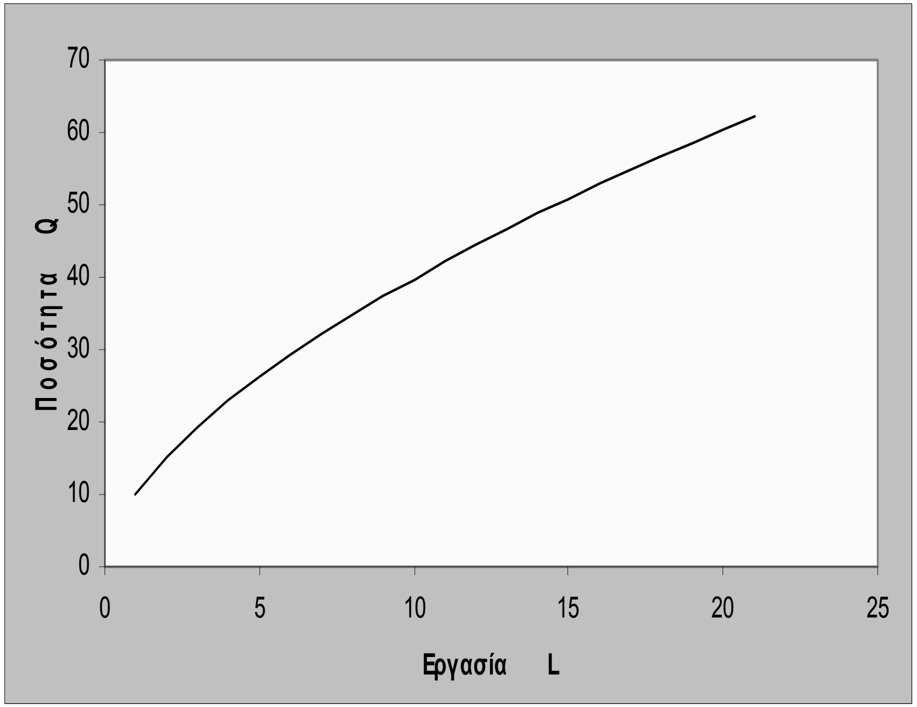
$$Q = F\left(\bar{K}, L\right) \quad \text{ή} \quad Q = F\left(L\right)$$

Παράδειγμα:

$$Q = 10L^{0,6}$$

Καμπύλη προϊόντος





Μέσο και Οριακό Προϊόν

Μέσο Προϊόν: Η ποσότητα προϊόντος που αντιστοιχεί *κατά μέσο όρο* σε κάθε μονάδα μεταβλητού συντελεστή

$$AP_L = \frac{Q}{L}$$

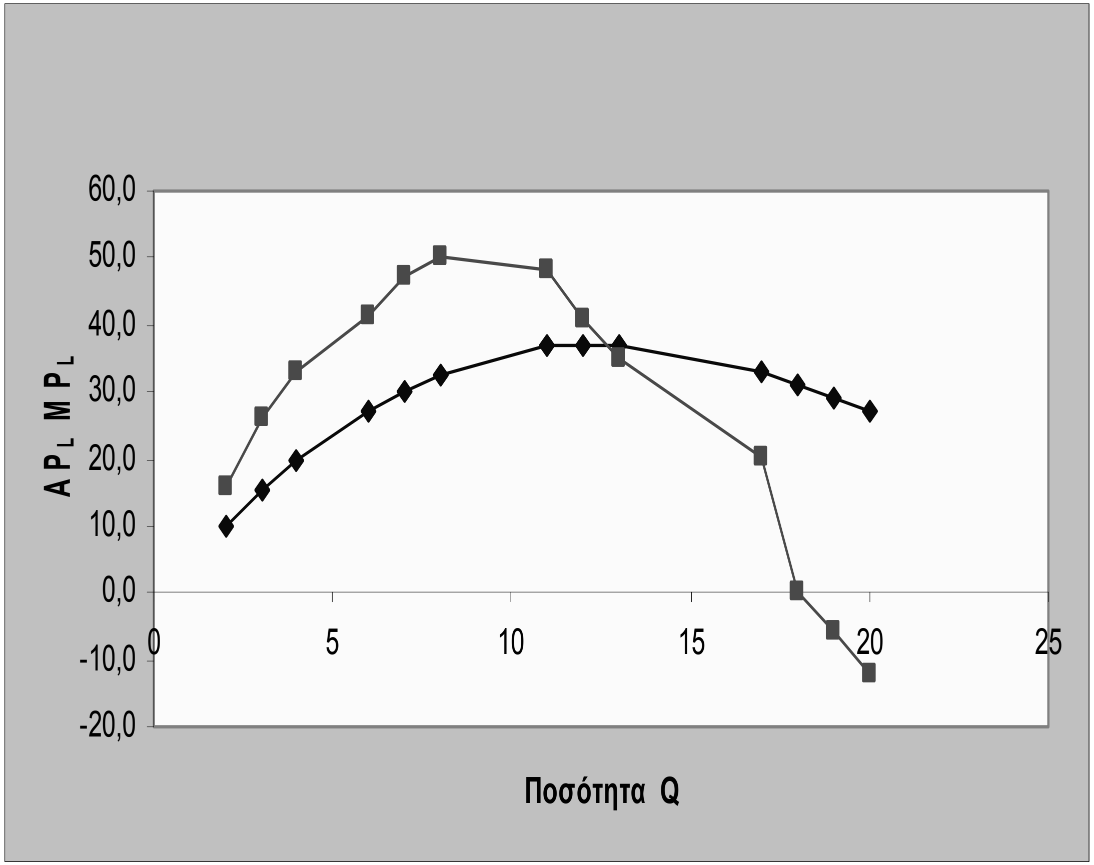
Παραγωγικότητα της εργασίας

Οριακό Προϊόν: Η *μεταβολ*ή στην παραγόμενη ποσότητα προϊόντος που αντιστοιχεί σε μια μεταβολή του μεταβλητού συντελεστή κατά *μια μονάδα*

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad \text{ή} \quad MP_L = \frac{dQ}{dL}$$

Παράδειγμα:

L	Q	AP_L	MP_L
1	4	4,0	
2	20	10,0	16,0
3	46	15,3	26,0
4	79	19,8	33,0
6	162	27,0	41,5
7	209	29,9	47,0
8	259	32,4	50,0
11	404	36,7	48,3
12	445	37,1	41,0
13	480	36,9	35,0
17	561	33,0	20,3
18	561	31,2	0,0
19	555	29,2	-6,0
20	543	27,2	-12,0

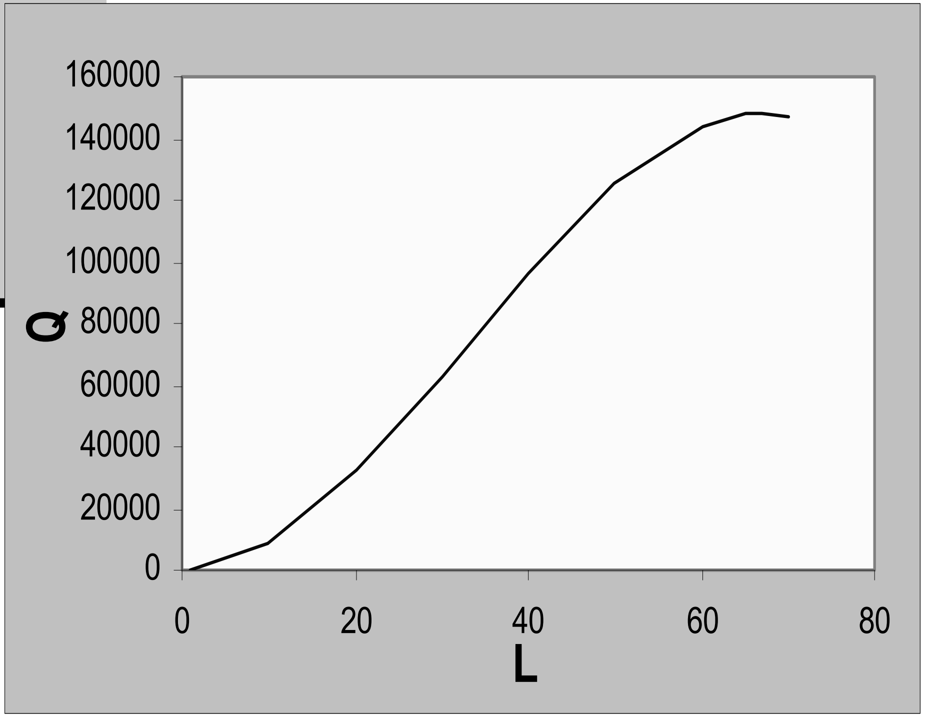


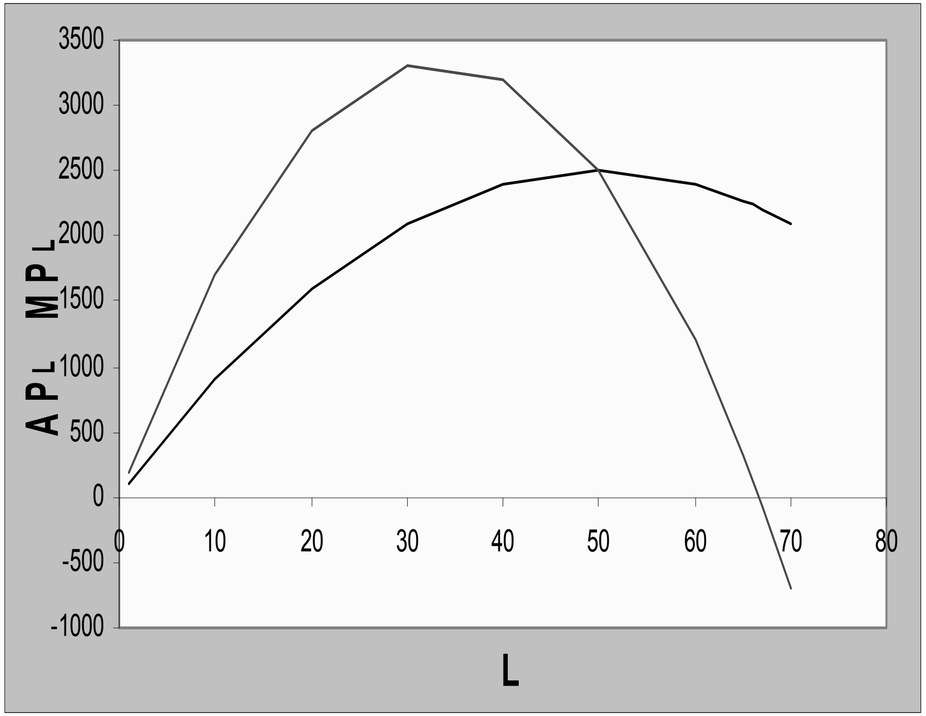
Παράδειγμα:

$$Q = 100L^2 - L^3$$

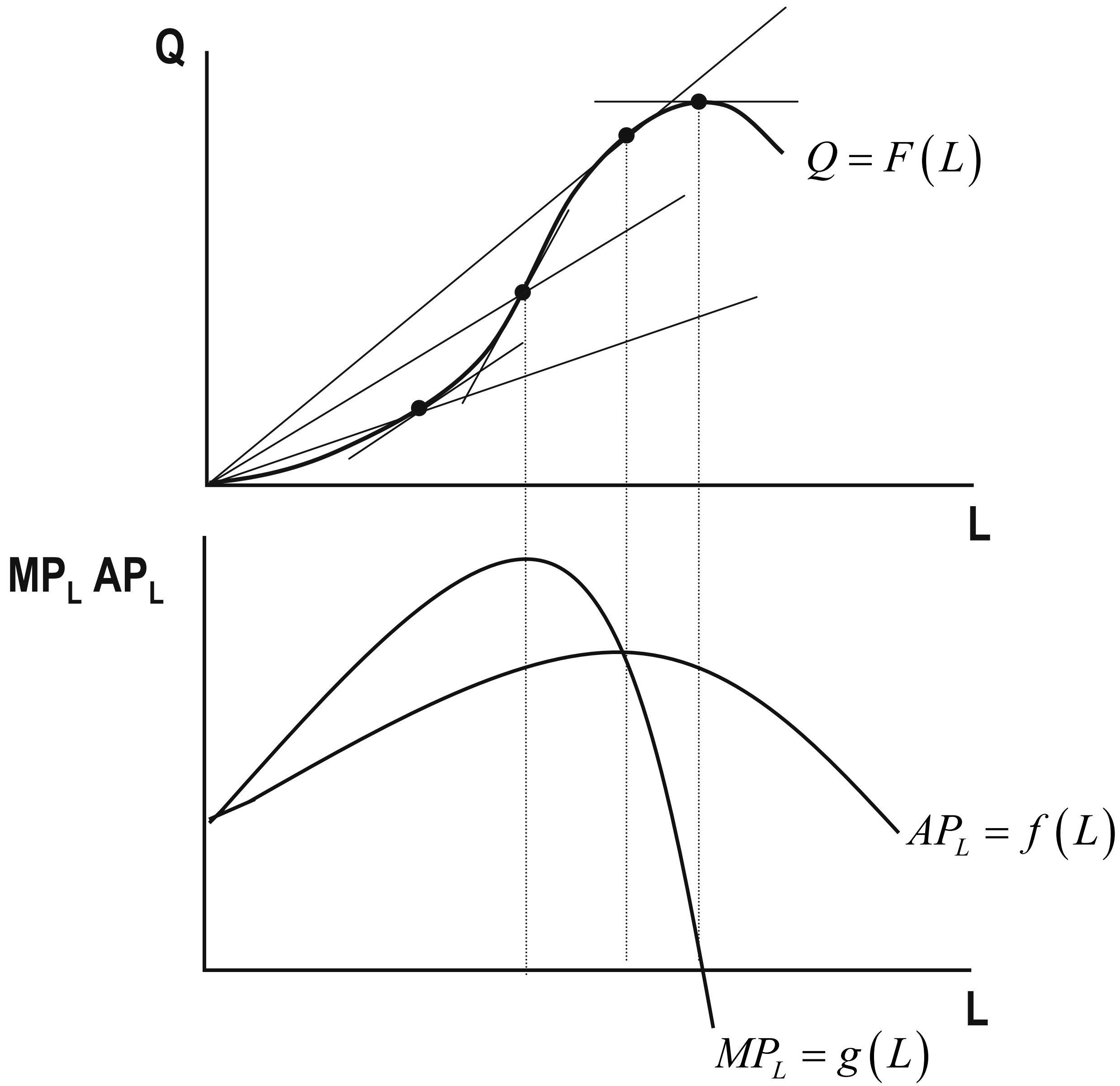
$$AP_L = \frac{100L^2 - L^3}{L} = 100L - L^2$$

$$MP_L = 200L - 3L^2$$

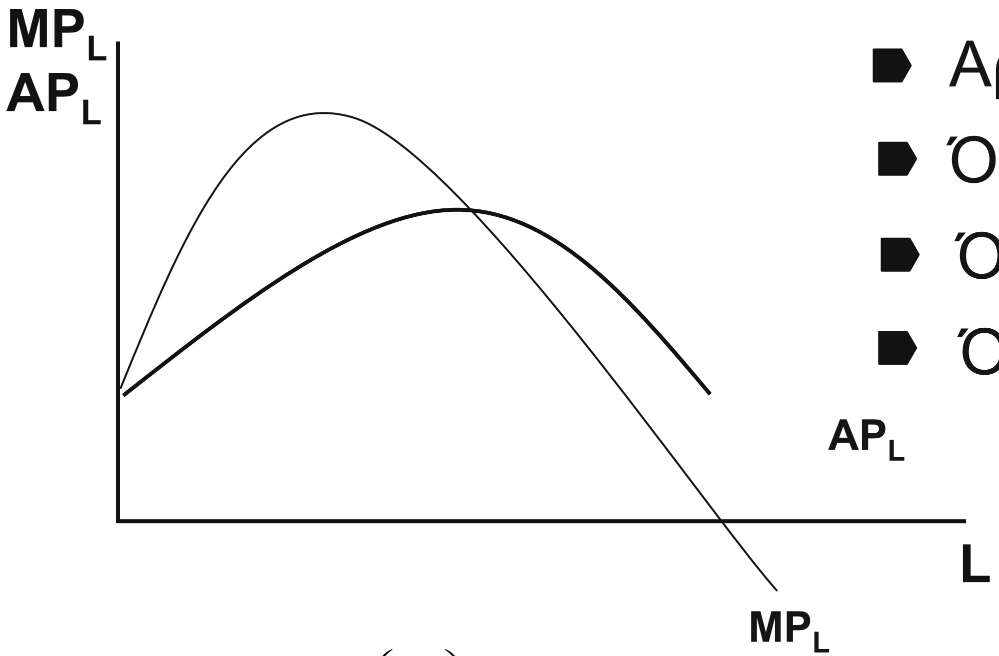




Γεωμετρική απεικόνιση του MP_L και του AP_L



Σχέση μεταξύ MP_L και AP_L



- Αρχίζουν από το ίδιο σημείο
- Όταν $MP_L > AP_L$ $AP_L \uparrow$
- Όταν $MP_L < AP_L$ $AP_L \downarrow$
- Όταν $MP_L = AP_L$ AP_L Max

$$\frac{d\left(AP_L\right)}{dL} = \frac{d\left(\frac{Q}{L}\right)}{dL} = \frac{\frac{dQ}{dL}L - Q}{L^2} = \frac{\frac{dQ}{dL} - \frac{Q}{L}}{L} = \frac{MP_L - AP_L}{L}$$

$$MP_L > AP_L \Rightarrow \frac{d\left(AP_L\right)}{dL} > 0$$

$$MP_L = AP_L \Rightarrow \frac{d\left(AP_L\right)}{dL} = 0 \quad (AP_L \text{ MAX})$$

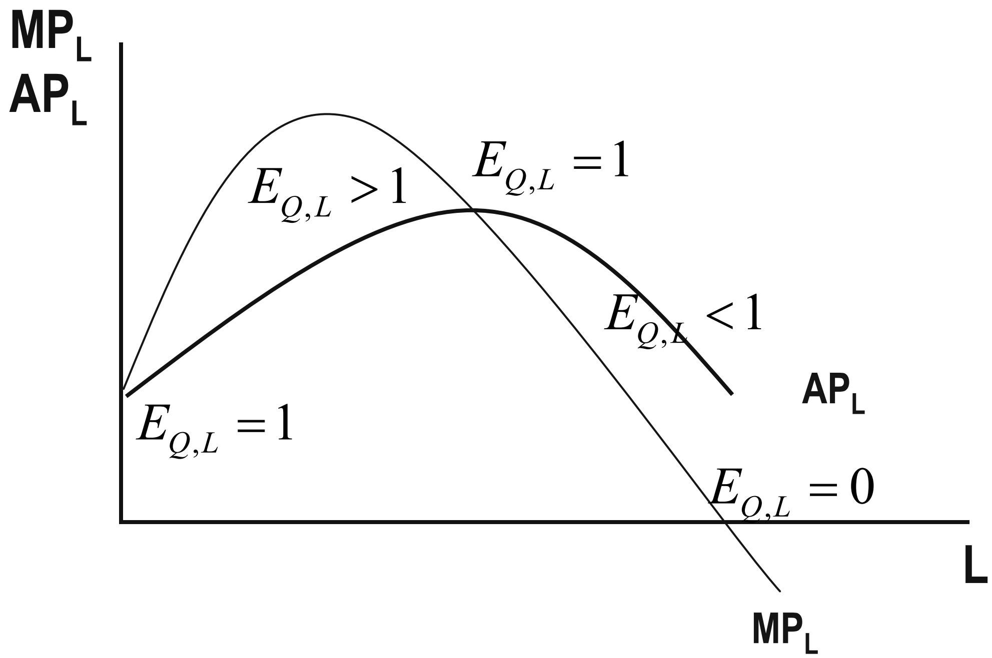
$$MP_L < AP_L \Rightarrow \frac{d\left(AP_L\right)}{dL} < 0$$

Ελαστικότητα Προϊόντος

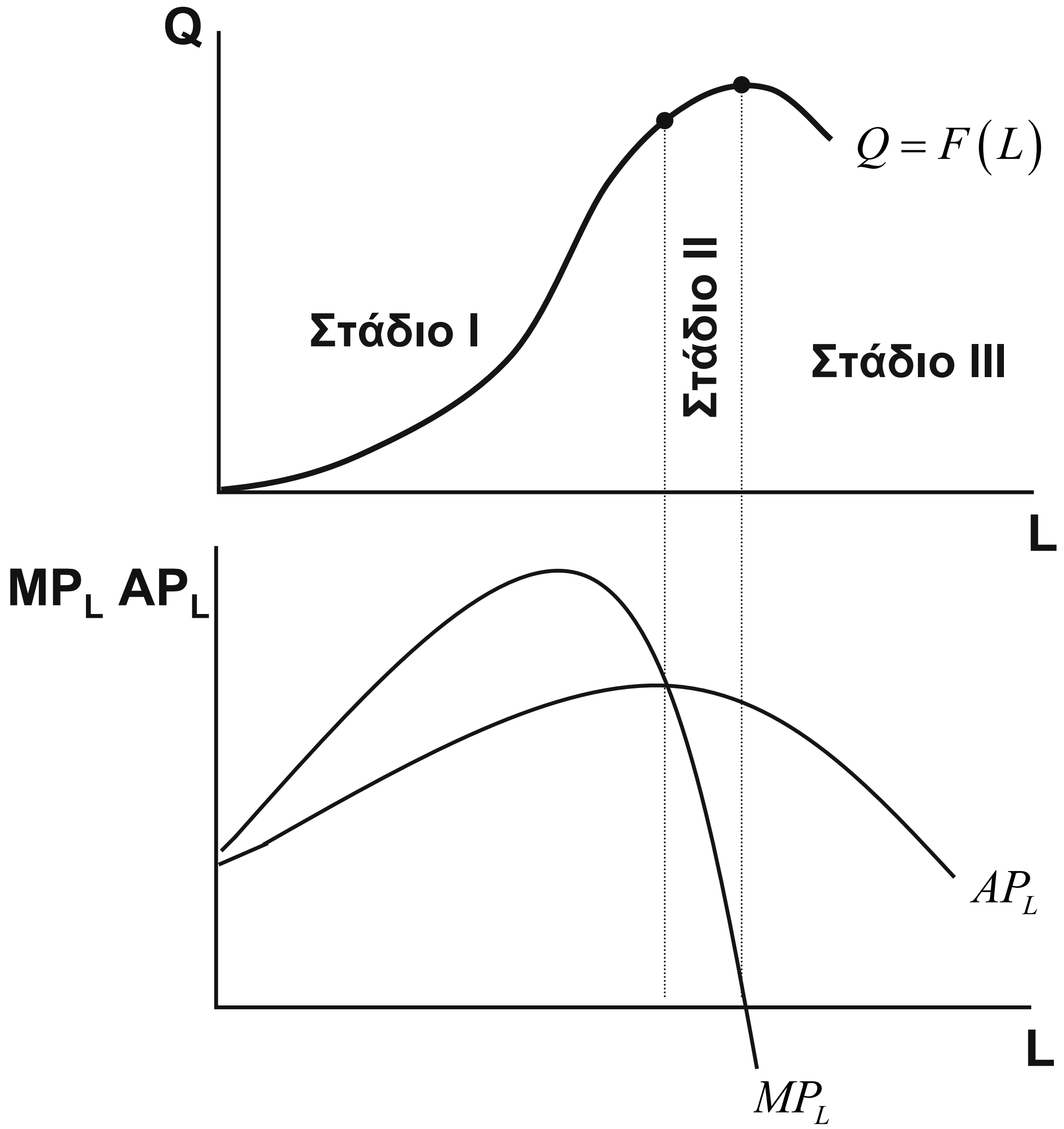
$$E_{Q,L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}\frac{L}{Q} \qquad\qquad E_{Q,L} = \frac{dQ}{dL}\frac{L}{Q}$$

$$E_{Q,L} = \frac{dQ/dL}{Q/L} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

$$MP_L > AP_L \quad \Rightarrow \quad E_{Q,L} > 1$$
$$MP_L < AP_L \quad \Rightarrow \quad E_{Q,L} < 1$$
$$MP_L = AP_L \quad \Rightarrow \quad E_{Q,L} = 1$$



Τα τρία στάδια της παραγωγής



Στάδιο I

$AP_L \uparrow$

Υποεκμετάλλευση του σταθερού συντελεστή

Στάδιο II

$AP_L \downarrow \quad MP_L > 0$

Υπερεκμετάλλευση του σταθερού συντελεστή

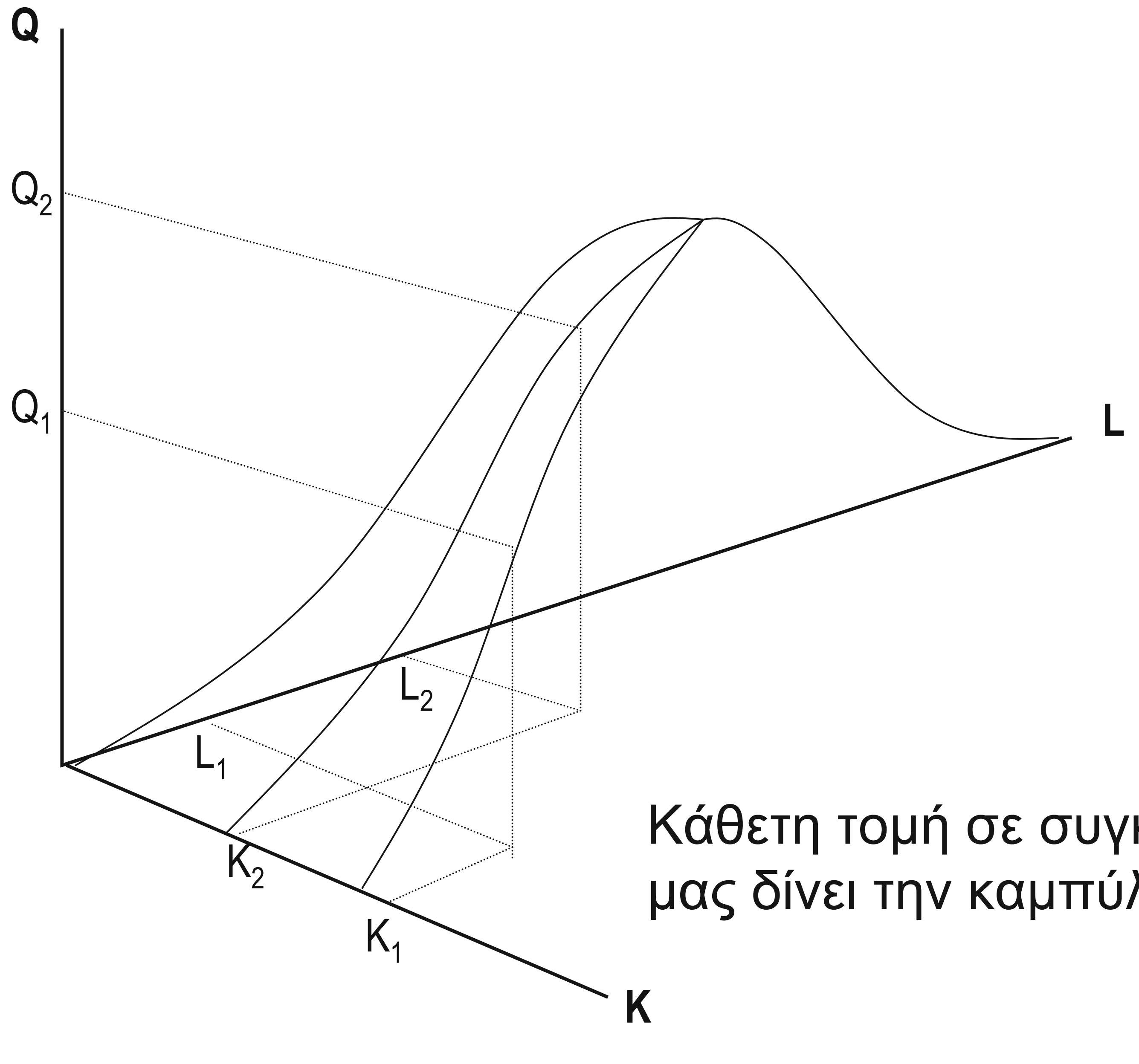
Στάδιο III

$MP_L < 0$

Νόμος των Φθινουσών Αποδόσεων

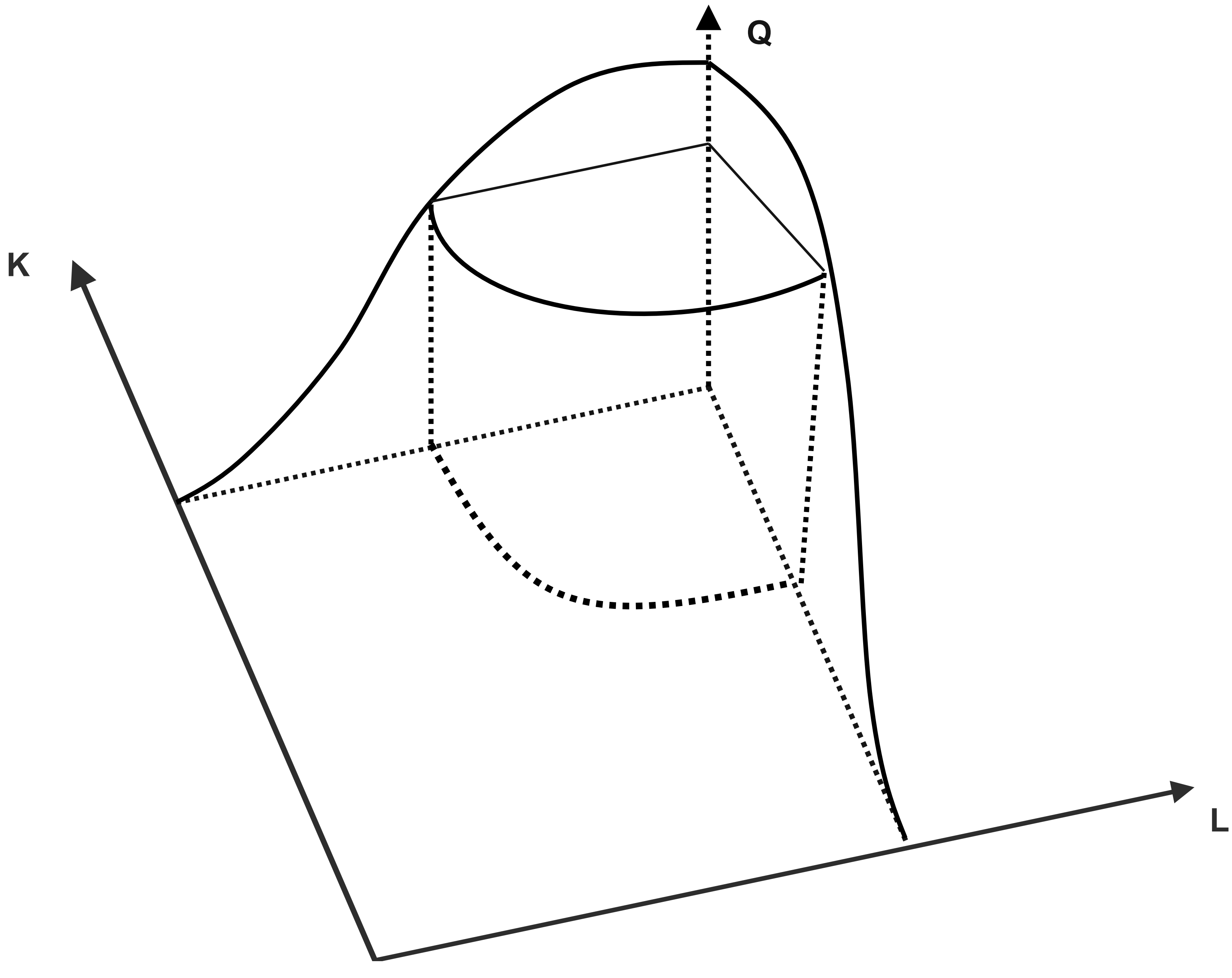
Παραγωγή στη μακροχρόνια περίοδο

Υπόθεση: Δύο μόνο συντελεστές παραγωγής, Εργασία (L) και Κεφάλαιο (K)

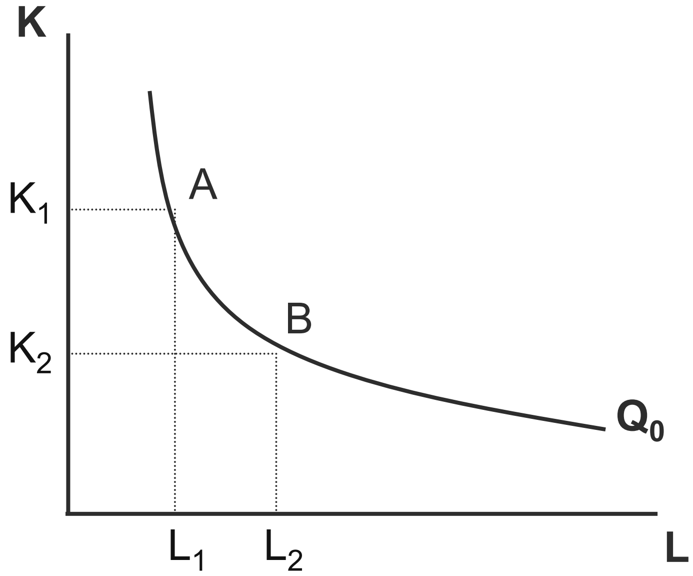


Κάθετη τομή σε συγκεκριμένο K μας δίνει την καμπύλη προϊόντος

Καμπύλες ίσου προϊόντος



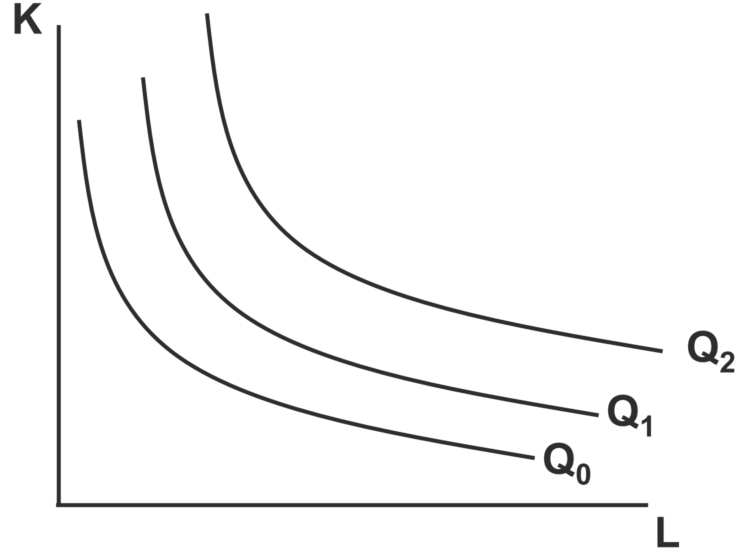
Καμπύλες ίσου προϊόντος



Οριζόντια τομή του διαγράμματος παραγωγής στο ύψος Q_0

Γεωμετρικός τόπος των σημείων που αντιπροσωπεύουν **συνδυασμούς** συντελεστών που παράγουν την **ίδια ποσότητα** προϊόντος

Υποθέτει πλήρη διαιρετότητα των συντελεστών παραγωγής



Χάρτης καμπυλών ίσου προϊόντος

Το σχήμα τους αντιπροσωπεύει την ***τεχνολογία*** της επιχείρησης

Ιδιότητες των καμπυλών ίσου προϊόντος

Η κατασκευή τους βασίζεται στην ίδια λογική με αυτή των Κ.Α. Γι αυτό και έχουν κοινές ιδιότητες

1. Ανώτερη καμπύλη αντιπροσωπεύει μεγαλύτερο ύψος παραγωγής

   Αφού αποκλείεται το Στάδιο ΙΙΙ $MP_L > 0, MP_K > 0$

2. Έχουν αρνητική κλίση

   Αφού $MP_L > 0, MP_K > 0$

   Μια αύξηση του ενός συντελεστή συνεπάγεται μείωση του άλλου για να διατηρηθεί το ίδιο επίπεδο παραγωγής

3. Δεν τέμνονται

   Το σημείο τομής θα αντιπροσώπευε δύο διαφορετικά επίπεδα παραγωγής στην ίδια καμπύλη ίσου προϊόντος

4. Είναι κυρτές ως προς την αρχή των αξόνων

5. Ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε καμπύλη ίσου προϊόντος δεν είναι απλός δείκτης αλλά έχει σημασία και σαν απόλυτο μέγεθος

Ο Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης

Η αρνητική κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος συνεπάγεται υποκατάσταση

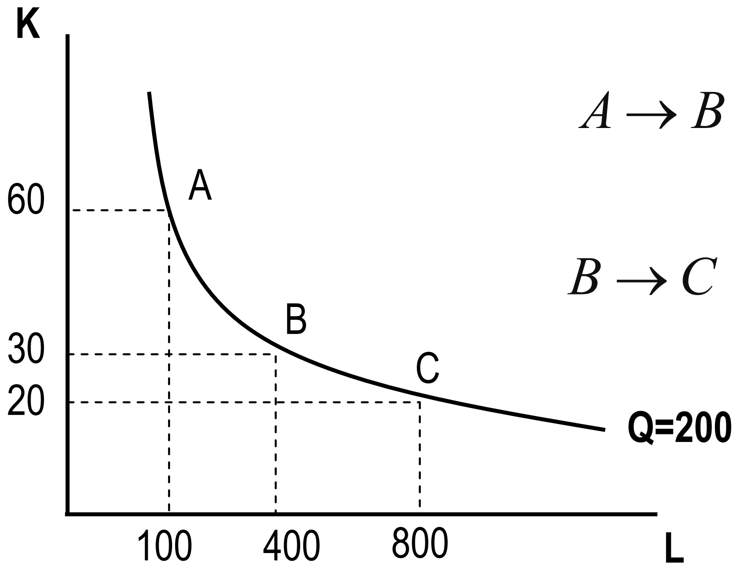
Με τι ρυθμό πραγματοποιείται η υποκατάσταση;

Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης (MRTS):

Η ποσότητα του ενός συντελεστή που πρέπει να εγκαταλειφθεί για να χρησιμοποιηθεί μια επιπλέον μονάδα του άλλου συντελεστή έτσι ώστε το επίπεδο παραγωγής να παραμείνει αμετάβλητο

$$MRTS_{L,K} = -\left.\frac{\Delta K}{\Delta L}\right|_{Q^0}$$

Παράδειγμα



$$A \to B \qquad MRTS_{L,K} = -\left.\frac{\Delta K}{\Delta L}\right|_{Q=200} = -\frac{30-60}{400-100} = 0,1$$

$$B \to C \qquad MRTS_{L,K} = -\left.\frac{\Delta K}{\Delta L}\right|_{Q=200} = -\frac{20-30}{800-400} = 0,025$$

<u>Ερμηνεία</u>

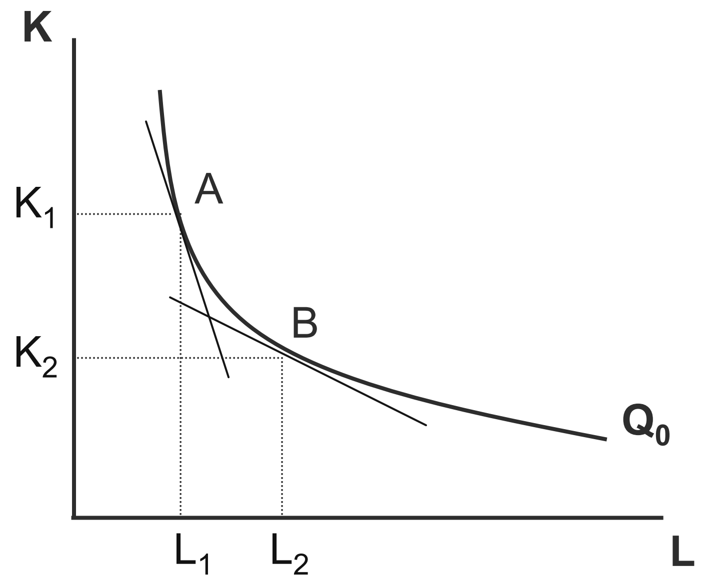
Από το σημείο Α στο σημείο Β για κάθε μονάδα εργασίας που προστίθεται πρέπει να αφαιρούνται **κατά μέσο όρο** 0,1 μονάδες κεφαλαίου ώστε να διατηρηθεί το ύψος παραγωγής στις 200 μονάδες

Όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι γνωστή

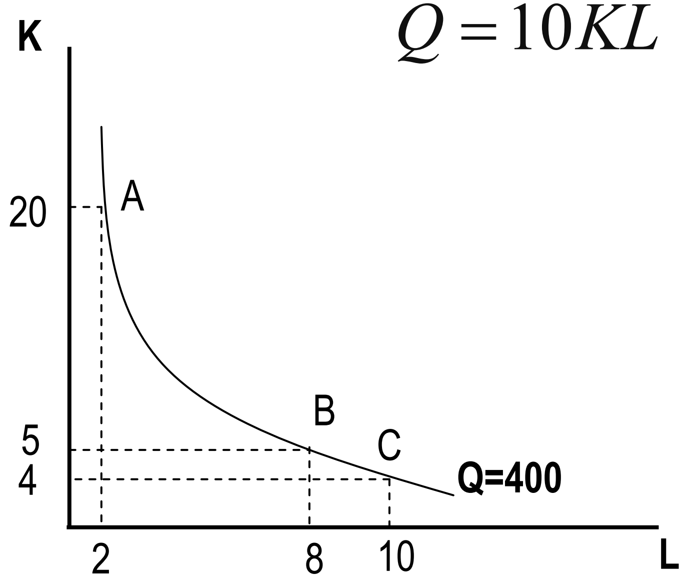
$$MRTS_{L,K} = -\left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q^0}$$

Υπολογίζεται σε κάθε σημείο της καμπύλης ίσου προϊόντος

Ισοδυναμεί με την απόλυτη τιμή της κλίσης της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο



Παράδειγμα



$$Q = 10KL$$

Για $Q = 400$ $\quad K = \dfrac{400}{10L} = \dfrac{40}{L}$

$$MRTS_{L,K} = -\left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q=400} = \frac{40}{L^2}$$

$$A \rightarrow \quad MRTS_{L,K} = \frac{40}{2^2} = 10$$

$$B \rightarrow \quad MRTS_{L,K} = \frac{40}{8^2} = 0,625$$

$$C \rightarrow \quad MRTS_{L,K} = \frac{40}{10^2} = 0,4$$

Ο Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης είναι ίσος με τον λόγο των δύο οριακών προϊόντων (MP_L , MP_K)

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial L} dL + \frac{\partial Q}{\partial K} dK \quad = MP_L \cdot dL + MP_K \cdot dK$$

Q σταθερό $\longrightarrow$ $dQ = 0$

$$MP_L \cdot dL + MP_K \cdot dK = 0$$

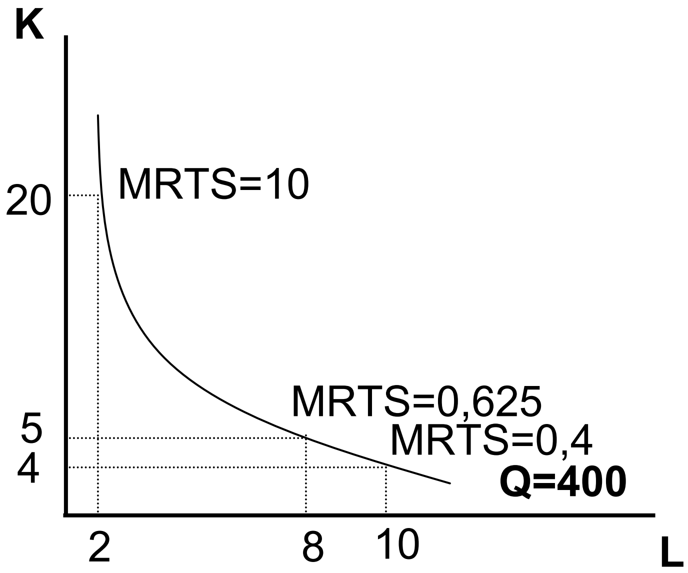
$$\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{dK}{dL} = MRTS_{L,K}$$

Παράδειγμα

$$Q = 10KL$$

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{10K}{10L} = \frac{K}{L}$$

	K	***L***	***MRTS***
A	20	2	10
B	5	8	0,625
C	4	10	0,4



Παρατήρηση:

Κυρτές καμπύλες ίσου προϊόντος

↓

Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης συνεχώς μειώνεται

Όσο το κεφάλαιο βρίσκεται σε αφθονία, σε σχέση με την εργασία, η ποσότητα κεφαλαίου που υποκαθίσταται με μια μονάδα εργασίας είναι μεγάλη.

Όσο το κεφάλαιο γίνεται πιο σπάνιο, η ποσότητα αυτή γίνεται όλο και πιο μικρή. Η υποκατάσταση γίνεται όλο και πιο δύσκολη.

Νόμος του Φθίνοντος Οριακού Λόγου Τεχνικής Υποκατάστασης

Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας

Μεταβολή όλων των συντελεστών παραγωγής κατά το ίδιο ποσοστό ⇨ Μεταβολή στην παραγόμενη ποσότητα

Ποσοστό μεταβολής της παραγόμενης ποσότητας	>	Ποσοστό μεταβολής των συντελεστών	***Αύξουσες Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας***
Ποσοστό μεταβολής της παραγόμενης ποσότητας	<	Ποσοστό μεταβολής των συντελεστών	***Φθίνουσες Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας***
Ποσοστό μεταβολής της παραγόμενης ποσότητας	=	Ποσοστό μεταβολής των συντελεστών	***Σταθερές Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας***

Ομογενείς συναρτήσεις παραγωγής

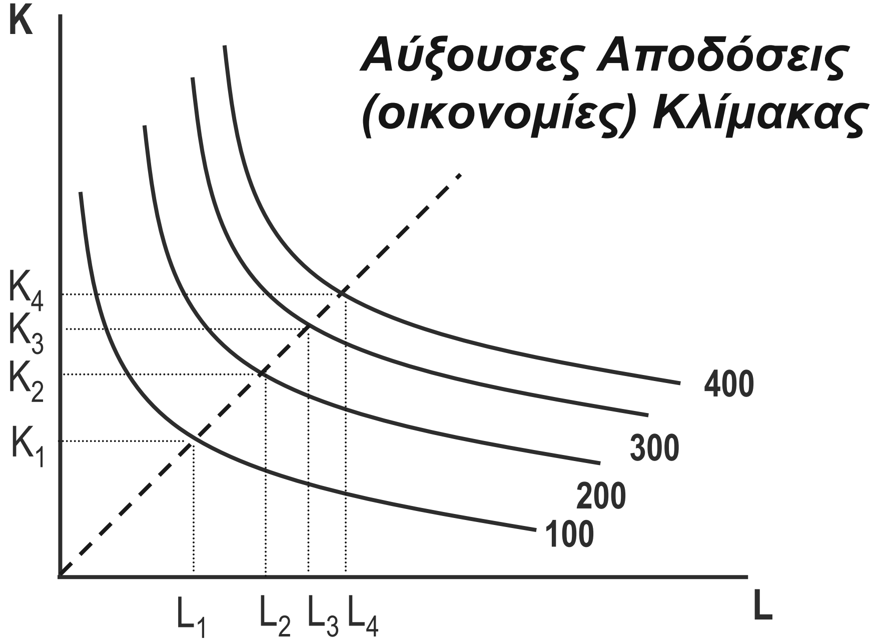
$$Q = F\left(K, L\right)$$

Ομογενής βαθμού ***r*** αν $F\left(tK, tL\right) = t^r F\left(K, L\right)$

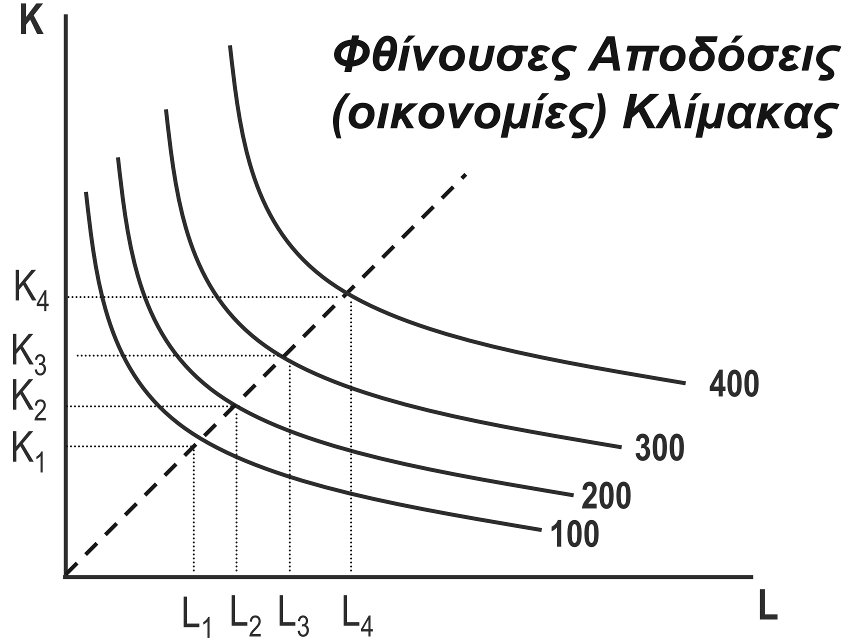
Αύξουσες Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας ***r* > 1**

Φθίνουσες Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας ***r* < 1**

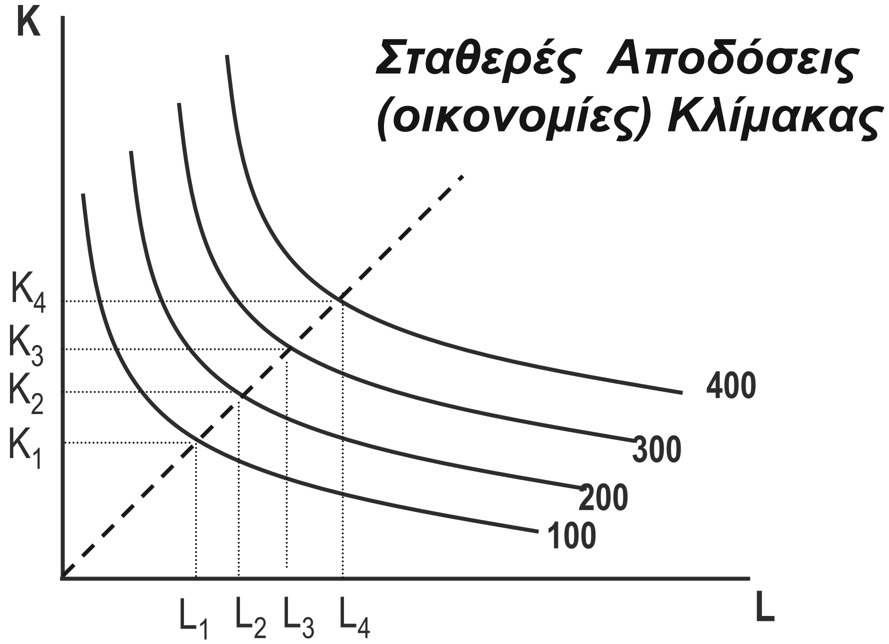
Σταθερές Αποδόσεις (οικονομίες) Κλίμακας ***r* = 1**



Αύξουσες Αποδόσεις
(οικονομίες) Κλίμακας
K
L
K4
K3
K2
K1
L1
L2
L3
L4
100
200
300
400



Φθίνουσες Αποδόσεις
(οικονομίες) Κλίμακας
K
L
K4
K3
K2
K1
L1
L2
L3
L4
100
200
300
400



Σταθερές Αποδόσεις
(οικονομίες) Κλίμακας
K
L
K4
K3
K2
K1
L1
L2
L3
L4
100
200
300
400

Παράδειγμα

$$Q = L^2 + K^2 + 10KL$$

$$(tL)^2 + (tK)^2 + 10(tK)(tL) = t^2\left(L^2 + K^2 + 10KL\right) = t^2 Q$$

$r = 2$ Αύξουσες Οικονομίες Κλίμακας

$$Q = L^{0,4} K^{0,6}$$

$$(tL)^{0,4}(tK)^{0,6} = t\left(L^{0,4} K^{0,6}\right) = tQ$$

$r = 1$ Σταθερές Οικονομίες Κλίμακας

$$Q = 20L^{0,3} K^{0,3}$$

$$20(tL)^{0,3}(tK)^{0,3} = t^{0,6}\left(20L^{0,3} K^{0,3}\right)$$

$r = 0,6$ Φθίνουσες Οικονομίες Κλίμακας

Η συμμετρία των σταδίων παραγωγής

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι συνάρτηση της εργασίας και του κεφαλαίου:

$$Q = f\left(L, K\right)$$

Η συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού (σταθερές αποδόσεις κλίμακας) εάν:

$$mQ = f\left(mL, mK\right)$$

Για m=1/L παίρνουμε:

$$\frac{Q}{L} = f\left(1, \frac{K}{L}\right) \Rightarrow Q = Lg\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial L} = g\left(\frac{K}{L}\right) - \frac{K}{L} g'\left(\frac{K}{L}\right) \Rightarrow MP_L = g\left(\frac{K}{L}\right) - \frac{K}{L} g'\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial K} = g'\left(\frac{K}{L}\right) \Rightarrow MP_K = g'\left(\frac{K}{L}\right)$$

Η συμμετρία των σταδίων παραγωγής

Άρα: $$L \cdot MP_L + K \cdot MP_K = Lg\left(\frac{K}{L}\right) - Kg'\left(\frac{K}{L}\right) + Kg'\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\Rightarrow L \cdot MP_L + K \cdot MP_K = Lg\left(\frac{K}{L}\right) = Q \quad \Rightarrow MP_K = \frac{Q}{K} - \frac{L}{K} \cdot MP_L$$

$$\Rightarrow MP_K = \frac{L}{K}\frac{Q}{L} - \frac{L}{K} \cdot MP_L = \frac{L}{K}\left(AP_L - MP_L\right)$$

$$MP_K = \frac{Q}{K} - \frac{L}{K} \cdot MP_L = AP_K - \frac{L}{K} \cdot MP_L \quad \Rightarrow \frac{L}{K} \cdot MP_L = AP_K - MP_K$$

Στάδιο I για το L: $AP_L < MP_L \Rightarrow MP_K < 0 \Rightarrow$ Στάδιο III για το K.

Στάδιο I για το K: $AP_K < MP_K \Rightarrow MP_L < 0 \Rightarrow$ Στάδιο III για το L.

Στάδιο II για το L: $AP_L > MP_L > 0 \quad \Rightarrow MP_K > 0$

$MP_L > 0 \Rightarrow AP_K - MP_K > 0 \quad AP_K > MP_K$ Στάδιο II για το K.

Ελαστικότητα Κλίμακας

Ποσοστιαία μεταβολή στην παραγόμενη ποσότητα ύστερα από μια μεταβολή στις εισροές κατά 1%

$$E_{SC} = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta \mu / \mu} \quad \text{ή} \quad E_{SC} = \frac{dQ/Q}{d\mu/\mu}$$

$$E_{SC} = E_{Q,K} + E_{Q,L}$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL \qquad \frac{dQ}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{Q}\frac{K}{K} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{Q}\frac{L}{L}$$

επειδή $\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = \frac{d\mu}{\mu}$

$$\frac{dQ/Q}{d\mu/\mu} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$$

$$E_{SC} = E_{Q,K} + E_{Q,L}$$

Παράδειγμα

$$Q = L^2 + K^2 + 10KL$$

$$E_{Q,L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \left(2L + 10K\right)\frac{L}{Q}$$

$$E_{Q,K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \left(2K + 10L\right)\frac{K}{Q}$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = \left(2L + 10K\right)\frac{L}{Q} + \left(2K + 10L\right)\frac{K}{Q}$$

$$= \frac{2L^2 + 10KL + 2K^2 10KL}{Q}$$

$$= \frac{2\left(L^2 + K^2 + 10KL\right)}{Q} = \frac{2Q}{Q} = 2$$

Παράδειγμα

(συνέχεια)

$$Q = L^{0,4}K^{0,6}$$

$$E_{Q,L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = 0,4L^{-0,6}K^{0,6}\frac{L}{Q}$$

$$= 0,4\left(L^{0,4}K^{0,6}\right)\frac{1}{Q} = 0,4$$

$$E_{Q,K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = 0,6L^{0,4}K^{-0,4}\frac{K}{Q}$$

$$= 0,6\left(L^{0,4}K^{0,6}\right)\frac{1}{Q} = 0,6$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = 0,4 + 0,6 = 1$$

Παράδειγμα

(συνέχεια)

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

$$E_{Q,L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = AaL^{1-\alpha}K^{\beta}\frac{L}{Q}$$

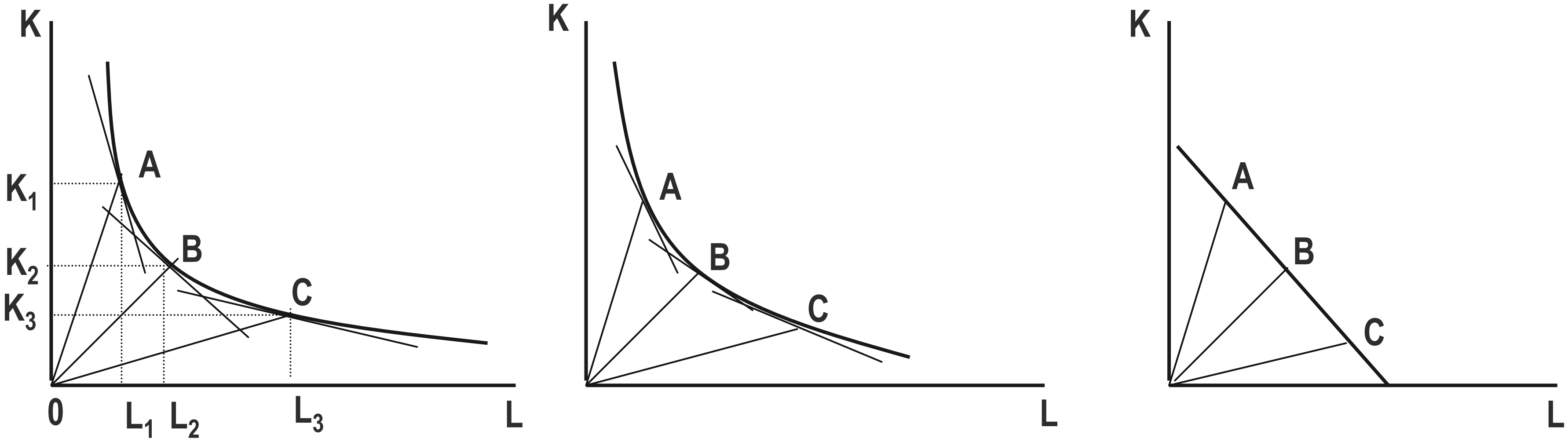
$$= \alpha\left(AL^{\alpha}K^{\beta}\right)\frac{1}{Q} = \alpha$$

$$E_{Q,K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = A\beta L^{\alpha}K^{1-\beta}\frac{K}{Q}$$

$$= \beta\left(AL^{\alpha}K^{\beta}\right)\frac{1}{Q} = \beta$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = \alpha + \beta$$

Ελαστικότητα Υποκατάστασης



Στο A η κλίση της OA $\longrightarrow \dfrac{K}{L}$

η κλίση της εφαπτομένης $\longrightarrow MRTS_{L,K}$

Όσο πιο εύκολη είναι η υποκατάσταση τόσο πιο αργή είναι η μεταβολή του MRTS σε σχέση με την μεταβολή του λόγου K/L

Ελαστικότητα Υποκατάστασης

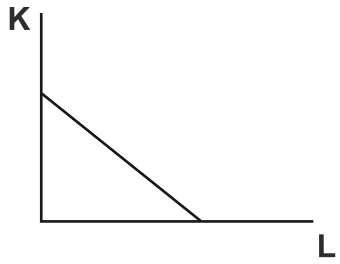
$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta\left(MRTS_{L,K}\right)} \quad \text{ή} \quad \sigma = \frac{d\left(K/L\right)/\left(K/L\right)}{d\left(MRTS_{L,K}\right)/MRTS_{L,K}}$$

Ποσοστιαία μεταβολή στον λόγο K/L ύστερα από μια μεταβολή του ΟΛΤΥ (MRTS) κατά 1%

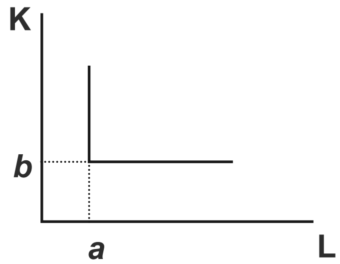
- Πάντα $\sigma > 0$
- Όσο μεγαλύτερη η τιμή του σ τόσο πιο εύκολη η υποκατάσταση

Ειδικές περιπτώσεις ελαστικότητας υποκατάστασης

1. $\sigma = \infty$



2. $\sigma = 0$



$$Q = \min\left\{aK, bL\right\}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Παραγωγή 1 μονάδας προϊόντος απαιτεί 1K και 3 L

$$Q = \min\left\{1K, \frac{1}{3}L\right\} \qquad \frac{K}{L} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{K}{L} > \frac{1}{3} \rightarrow$$ Πλεονάζον κεφάλαιο

$$\frac{K}{L} < \frac{1}{3} \rightarrow$$ Πλεονάζουσα εργασία

3. $\sigma = c$ (σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης)

$$Q = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}}$$

όπου $-1 < \rho < \infty \quad \rho \neq 0 \quad 0 < \delta < 1 \quad \nu, \gamma > 0 \quad \sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$

Συνάρτηση ***CES*** (Constant Elasticity of Substitution)

4. $\sigma = 1$ $Q = AK^{a}L^{b}$ Συνάρτηση ***Cobb-Douglas***

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{bAK^{a}L^{b-1}}{aAK^{a-1}L^{b}} = \frac{b}{a}\frac{K}{L}$$

$$\sigma = \frac{d\left(K/L\right)}{d\left(MRTS_{L,K}\right)}\frac{K/L}{MRTS_{L,K}} = \frac{a}{b}\frac{K/L}{\frac{b}{a}\frac{K}{L}} = 1$$